

المنطق

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \text{ et } B \Rightarrow A) \quad (4)$$

$$(A \text{ et } B) \Leftrightarrow (B \text{ et } A) \quad (5)$$

$$(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (B \text{ ou } A) \quad (6)$$

$$[(A \text{ et } B) \text{ et } C] \Leftrightarrow [A \text{ et } (B \text{ et } C)] \quad (7)$$

$$[A \text{ ou } (B \text{ ou } C)] \Leftrightarrow [(A \text{ ou } B) \text{ ou } C] \quad (8)$$

$$[A \Rightarrow B \text{ et } B \Rightarrow C] \Rightarrow (A \Rightarrow C) \quad (9)$$

قانون التاكافوات المتتالية (10)

$$(A \Leftrightarrow B \text{ et } B \Leftrightarrow C) \Rightarrow A \Leftrightarrow C$$

$$[A \text{ et } (B \text{ ou } C)] \Leftrightarrow [(A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C)] \quad (11)$$

$$[A \text{ ou } (B \text{ et } C)] \Leftrightarrow [(A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C)] \quad (12)$$

(13) قانوني موركان.

$$\neg(A \text{ et } B) \Leftrightarrow (\neg A \text{ ou } \neg B) \quad (*)$$

$$\neg(A \text{ ou } B) \Leftrightarrow (\neg A \text{ et } \neg B) \quad (*)$$

(15) قانون الاستلزام المضاد للعكس

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \text{ et } \neg B) \quad (16)$$

(17) قانون الخلف

$$((\neg A \Rightarrow \neg B) \text{ et } B) \Rightarrow A$$

(18) قانون فصل الحالات

$$(A \Rightarrow C \text{ et } B \Rightarrow C) \Rightarrow [(A \text{ ou } B) \Rightarrow C]$$

(V) بعض الاستدلالات.

(1) الاستدلال بالتكافؤات المتتالية:

لكي نبين أن العبارة A صحيحة يكفي أن نبين أن $A \Leftrightarrow B$ و B صحيحة.

(2) الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس:

لكي نبين أن $A \Rightarrow B$ يكفي أن نبين $\neg B \Rightarrow \neg A$.

(3) الاستدلال بالخلف:

لكي نبين أن العبارة A صحيحة نفترض العكس ونصل إلى تناقض مع المعطيات.

(4) الاستدلال بفصل الحالات:

لتكن $E = E_1 \cup E_2$ لكي نبين أن $(\forall x \in E): A(x)$ يكفي أن نبين ما يلي: (* إذا كان $x \in E_1$ فإن A(x) صحيحة. (* إذا كان $x \in E_2$ فإن A(x) صحيحة.

(5) الاستدلال بالترجع:

لكي نبين أن العبارة P(n) صحيحة لكل عدد طبيعي $n \geq n_0$ نبين ما يلي:

(* نبين أن العبارة صحيحة من أجل $n = n_0$

(* نفترض العبارة P صحيحة من أجل n.

(* نبين أن العبارة P صحيحة من أجل n+1.

(I) العبارة - الدالة العبارية

(1) نسمي عبارة كل جملة مفيدة ويمكن الحكم على المعنى الذي تحمله بالصحة أو الخطأ.

(2) نسمي دالة عبارية كل نص يحتوي على متغير x من مجموعة E ويصبح عبارة كلما عوضنا x بعنصر محدد من E.

(II) المكملات

لتكن A(x) دالة عبارية معرفة على مجموعة E.

(1) العبارة: $(\exists x \in E): A(x)$ "تقرأ" يوجد على الأقل x من E بحيث A(x) وتعني يوجد على الأقل عنصر x من E يحقق A(x). الرمز \exists يسمى المكمل الوجودي.

(2) العبارة: $(\forall x \in E): A(x)$ "تقرأ" مهما كان x من E لدينا A(x) وتعني أن جميع عناصر E تحقق A(x). الرمز \forall يسمى المكمل الكوني.

(III) العمليات المنطقية.

(1) النفي

(a) نفي العبارة A هي العبارة التي نرسم لها $\neg A$ والتي تكون صحيحة إذا كانت A خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت A صحيحة.

ملاحظة: " $\neg A$ هي عكس العبارة A "

(b) نفي العبارة " $(\forall x \in E): A(x)$ " هي العبارة " $(\exists x \in E): \neg A(x)$ ".

(c) نفي العبارة " $(\exists x \in E): A(x)$ " هي العبارة " $(\forall x \in E): \neg A(x)$ ".

(2) العطف

عطف العبارتين A و B هي العبارة التي نرسم لها B

(A و B) والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت A صحيحة و B صحيحة.

(3) الفصل

فصل العبارتين A و B هي العبارة التي نرسم لها B

(A أو B) والتي تكون صحيحة إذا كانت إحدى العبارتين على الأقل صحيحة.

(4) الاستلزام

استلزام العبارتين A و B هي العبارة التي نرسم لها B والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت A صحيحة و B خاطئة. (وتقرأ A تستلزم B).

(5) التكافؤ

تكافؤ العبارتين A و B هي العبارة التي نرسم لها B والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت A و B نفس قيمة الحقيقة. (وتقرأ A تكافؤ B).

(IV) القوانين المنطقية.

(1) تعريف:

نسمي قانونا منطقيا كل عبارة مكونة من عدة عبارات مرتبطة بالروابط المنطقية وتكون صحيحة مهما كانت قيمة حقيقة هذه العبارات.

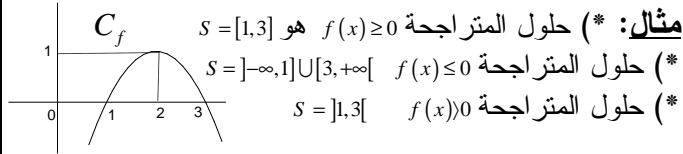
(2) جرد لأهم القوانين المنطقية.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \text{ ou } B) \quad (2) \quad \neg(\neg A) \Leftrightarrow A \quad (1)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B) \quad (3)$$

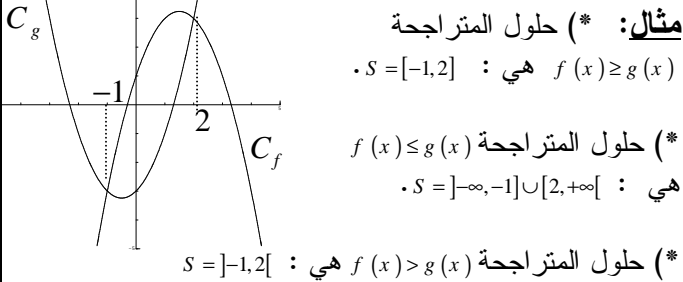
عموميات حول الدوال

(* حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f تحت محور الأفاصيل.



2 نقول إن $f \leq g$ على D إذا وفقط إذا كان $f(x) \leq g(x)$ لكل $x \in D$.
ملاحظات: (التأويل الهندسي)
 (* تكون $f \leq g$ إذا وفقط إذا كان C_f تحت C_g .

(* حلول المتراجحة $f(x) \leq g(x)$ هي المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g .



3 (a) تقاطع C_f مع محور الأرتيب هي النقطة $A(0, f(0))$.

(b) من أجل تحديد تقاطع C_f مع محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x) = 0$ إذا كانت $x_2, x_1 \dots$ هي الحلول فإن نقط تقاطع هي $\dots B(x_2, 0); A(x_1, 0)$

(* حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل.

(c) لكي نحدد تقاطع C_f و C_g نحل المعادلة $f(x) = g(x)$ وإذا كانت $x_2, x_1 \dots$ هي الحلول فإن نقط تقاطع C_f و C_g هي $\dots B(x_2, f(x_2)), A(x_1, f(x_1))$

(* حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g .

IV - دالة مكبورة - دالة مصغورة

1 نقول إن f مكبورة على D إذا وُجد عدد M بحيث $f(x) \leq M$ لكل $x \in D$.

2 نقول إن f مصغورة على D إذا وُجد عدد m بحيث $f(x) \geq m$ لكل $x \in D$.

3 نقول إن f محدودة على D إذا وُجد عدد M و m بحيث $m \leq f(x) \leq M$ لكل $x \in D$.

ملاحظة: تكون f محدودة على D إذا وُجد عدد موجب M بحيث $|f(x)| \leq M$ لكل $x \in D$.

V - مطارف دالة

1 لكي نبين أن f تقبل قيمة قصوية مطلقة في x_0 نبين أن $f(x) \leq f(x_0)$ لكل x من D_f . وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$.

2 لكي نبين أن f تقبل قيمة دنوية مطلقة في x_0 نبين أن $f(x) \geq f(x_0)$ لكل x من D_f . وتكون هذه القيمة الدنوية هي $f(x_0)$.

I - دالة زوجية - دالة فردية

1 من أجل دراسة زوجية دالة، نقوم بتحديد D_f ونتحقق أن لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$ ثم نحسب $f(-x)$.

(* إذا وجدنا $f(-x) = f(x)$ فإن f زوجية.

(* إذا وجدنا $f(-x) = -f(x)$ فإن f فردية.

2 (* يمكن لدالة أن لا تكون لا زوجية ولا فردية.

$$|-x| = |x| \quad (-x)^n = \begin{cases} x^n & ; \text{زوجي } n \\ -x^n & ; \text{فردى } n \end{cases}$$

3 تكون f زوجية إذا وفقط إذا كان C_f متماثلاً بالنسبة لمحور الأرتيب.

4 تكون f فردية إذا وفقط إذا كان C_f متماثلاً بالنسبة لأصل المعلم.

II - رتابة دالة

1 من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I : نعتبر x و y من I بحيث $x < y$ ونقارن $f(x)$ و $f(y)$.

(* إذا وجدنا $f(x) \leq f(y)$ فإن f تزايدية (قطعا) على I .

(* إذا وجدنا $f(x) \geq f(y)$ فإن f تناقصية (قطعا) على I .

(* إذا وجدنا $f(x) = f(y)$ فإن f ثابتة على I .

2 من أجل دراسة رتابة f على مجال I : نعتبر $x, y \in I$ بحيث $x \neq y$ ونقوم بحساب معدل التغيير $T(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$

ونقوم بدراسة إشارة $T(x, y)$ (بتأويله مثلاً).

(* إذا وجدنا $T(x, y) \geq 0$ فإن f تزايدية (قطعا) على I .

(* إذا وجدنا $T(x, y) \leq 0$ فإن f تناقصية (قطعا) على I .

(* إذا وجدنا $T(x, y) = 0$ فإن f ثابتة على I .

3 نقول إن f رتبية على I إذا كانت تزايدية أو تناقصية على I .

4 (a) لتكن f دالة زوجية.

(* إذا كانت f تزايدية على I فإن f تناقصية على $-I$.

(* إذا كانت f تناقصية على I فإن f تزايدية على $-I$.

(b) لتكن f دالة فردية.

(* إذا كانت f تزايدية على I فإن f تزايدية على $-I$.

(* إذا كانت f تناقصية على I فإن f تناقصية على $-I$.

(c) إذا كان $f = [a, b]$ فإن $-f = [-b, -a]$.

III - مقارنة دالتين

1 (a) نقول إن f موجبة على D وتكتب $f \geq 0$ إذا كان $f(x) \geq 0$ لكل $x \in D$.

(b) نقول إن f سالبة على D وتكتب $f \leq 0$ إذا كان $f(x) \leq 0$ لكل $x \in D$.

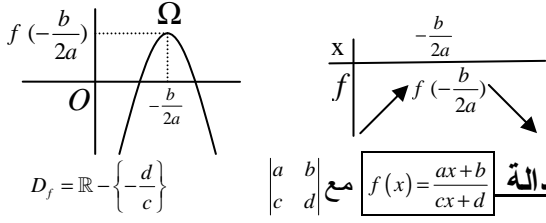
ملاحظات: (التأويل الهندسي)

(* تكون $f \geq 0$ على D إذا وفقط إذا كان C_f فوق محور الأفاصيل.

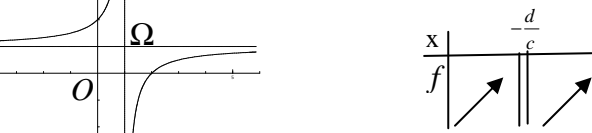
(* تكون $f \leq 0$ على D إذا وفقط إذا كان C_f تحت محور الأفاصيل.

(* حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f فوق محور الأفاصيل.

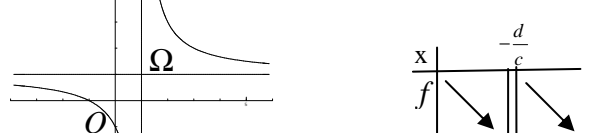
(b) إذا كان $a < 0$ فإن جدول تغيرات f هو كما يلي : و C_f شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ تقعره موجه نحو الأسفل.



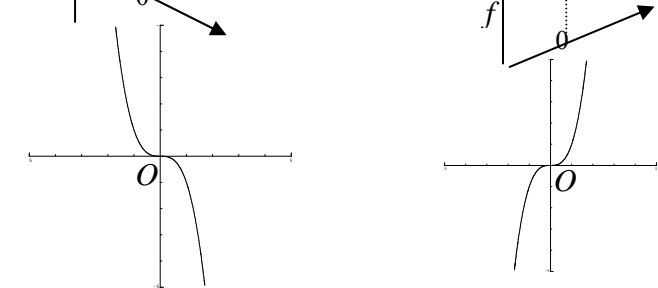
(a) إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ فإن جدول تغيرات f هو كما يلي : و C_f هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ متارباة $x = \frac{-d}{c}$ $y = \frac{a}{c}$



(b) إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$ فإن جدول تغيرات f هو كما يلي : و C_f هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ متارباة $x = \frac{-d}{c}$ $y = \frac{a}{c}$



(3) الدالة $f(x) = ax^3$ إذا كان $a < 0$



ملاحظة: بالنسبة ل $f(x) = ax^3 + b$ نفس الشيء تصبح فقط $f(0) = b$

(4) الدالة $f(x) = \sqrt{x+a}$ فقط $D_f = [-a, +\infty[$

ملاحظة: بالنسبة ل $f(x) = \sqrt{x+a} + b$ نفس الشيء تصبح فقط $f(-a) = b$

(5) (a) نعتبر الدالة $g(x) = |f(x)|$ مكون من جزء C_f الموجود فوق محور الأفاصيل. ومماثل جزء C_f الموجود تحت محور الأفاصيل بالنسبة لمحور الأفاصيل.

(b) نعتبر الدالة $g(x) = f(|x|)$ مكون من جزء C_f الموجود في $[0, +\infty[$ ومماثله بالنسبة لمحور الأرتايب.

(6) حلول المعادلة $f(x) = m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f والمستقيم $(\Delta): y = m$.

(3) لكي نبين أن α قيمة قصوية مطلقة ل f نبين أن $f(x) \leq \alpha$ ونبحث عن x_0 بحيث $f(x_0) = \alpha$

(4) لكي نبين أن α قيمة دنوية مطلقة ل f نبين أن $f(x) \geq \alpha$ ونبحث عن x_0 بحيث $f(x_0) = \alpha$

(5) لكي نبين f تقبل قيمة قصوية نسبية عند x_0 نبين أنه يوجد مجال I يحتوي على x_0 بحيث $f(x) \leq f(x_0)$ لكل $x \in I$. وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$. (تعريف مماثل بالنسبة لقيمة دنوية نسبية)

ملاحظة: **(a)** إذا كان جدول تغيرات f هو α فإن α هي القيمة الدنوية المطلقة

(b) إذا كان جدول تغيرات f هو α فإن α هي القيمة القصوية المطلقة

(c) إذا كان جدول تغيرات f هو α فإن α هي قيمة قصوية نسبية و β قيمة دنوية نسبية.

VI - صور جزء من IR بدالة عديدة

(1) $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$ يعني $f(D)$ هي المجموعة المكونة من صور جميع عناصر D .

(2) $y \in f(D)$ يعني يوجد $x \in D$ بحيث $f(x) = y$.

(3) لكي نبين أن $f(I) = J$ جبريا نبين ما يلي:

(a) $f(I) \subset J$ ولهذا نأخذ $x \in I$ ونبين أن $f(x) \in J$

(b) $J \subset f(I)$ ولهذا نأخذ $y \in J$ ونبين أن $y \in f(I)$ ولهذا نبحث عن $x \in I$ بحيث $f(x) = y$

VII - مركب دالتين

(1) لتكن $g \circ f$ دالتين بحيث $f(D_f) \subset D_g$ الدالة $g \circ f$ هي الدالة المعرفة على D_f بما يلي $(\forall x \in D_f) g \circ f(x) = g(f(x))$.

(2) من أجل تحديد حيز تعريف $g \circ f$ نتبع ما يلي: $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$

(b) لكي نبين أن $g \circ f$ معرفة على I نبين ما يلي: $\begin{cases} I \subset D_f \\ f(I) \subset D_g \end{cases}$

(3) إذا كانت $g \circ f$ تحققان ما يلي:

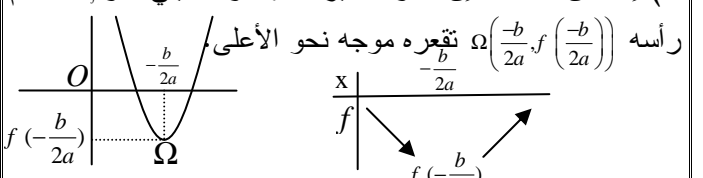
$\begin{cases} f \text{ رتيبة على } I \\ f(I) \subset J \\ g \text{ رتيبة على } J \end{cases}$ فإن $g \circ f$ رتيبة على I

تكون $g \circ f$ تزايدية إذا كانت f و g نفس الرتابة. وتكون تناقصية إذا كانت f و g رتابتين مختلفتين

VIII - الدوال الاعتيادية

(1) الدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

(a) إذا كان $a > 0$ فإن جدول تغيرات f هو كما يلي : و C_f شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ تقعره موجه نحو الأعلى.



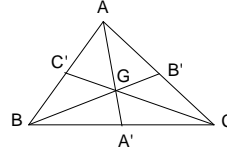
5) إحدائيات المرجح:

ليكن G مرجح $\{(A, \alpha)(B, \beta)(C, \gamma)\}$ إحدائيات G هي

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C) \\ y_G = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}(\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C) \end{cases}$$

6) التجميعية:

إذا كان G مرجح $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ و G_1 مرجح $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ فإن G مرجح $\{(G_1, \alpha + \beta), (C, \gamma)\}$ وهذا يعني أن مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع وزني تلك النقطتين.



7) ليكن (ABC) مثلثا مركز ثقله G

G هو مرجح $\{(A, 1)(B, 1)(C, 1)\}$

A' و B' و C' منتصفات

$[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي المتوسطات

(AA') و (BB') و (CC') تتلاقى في G .

$$\text{ولدينا } \overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CC'} \quad \overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BB'} \quad \overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AA'}$$

III) مرجح أربع نقط.

نعرف بنفس الطريقة مرجح أربع نقط وسيكون لدينا نفس الخصائص السابقة. هناك فرق فقط في التجميعية حيث تصبح:

7) مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين أو عوضنا كل نقطتين بمرجحهما متزن بمجموع الوزنين، أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها متزن بمجموع الأوزان.

الحساب المثلثي

(b) $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v})$ [2] (علاقة شال).

(c) $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -(\vec{v}, \vec{u})$ [2π]

(d) إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمين ولهما نفس المنحى فإن $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0$ [2π]

(e) إذا كانت \vec{u} و \vec{v} مستقيمين ولهما منحيان متعاكسان فإن $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi$ [2π]

(f) يكون α و β قياسين لنفس الزاوية إذا وفقط إذا كان $\alpha - \beta = 2k\pi$ يعني $\alpha \equiv \beta$ [2π].

ملاحظة:

(1) تكون \vec{u} و \vec{v} مستقيمين إذا وفقط إذا كان حاملهما متوازيين.

(2) المتجهتين \vec{u} و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha > 0$) مستقيمان ولهما نفس المعنى.

(3) المتجهتين \vec{u} و $\alpha\vec{u}$ (مع $\alpha < 0$) مستقيمان ولهما منحيان متعاكسان.

III - الدوال المثلثية

1) تعريف

لتكن U الدائرة المثلثية التي أصلها I .

وليكن (Δ) المحور المماس ل U في I .

ندرج المحور (Δ) بنفس وحدة معلم وأصله I .

(* ليكن x من \mathbb{R} و M النقطة التي

أفصولها المنحني هو x

ليكن a أفصول ل M و b

ارتوب M يعني $M(a, b)$.

c أفصول تقاطع (OM) مع (Δ) على المحور (Δ)

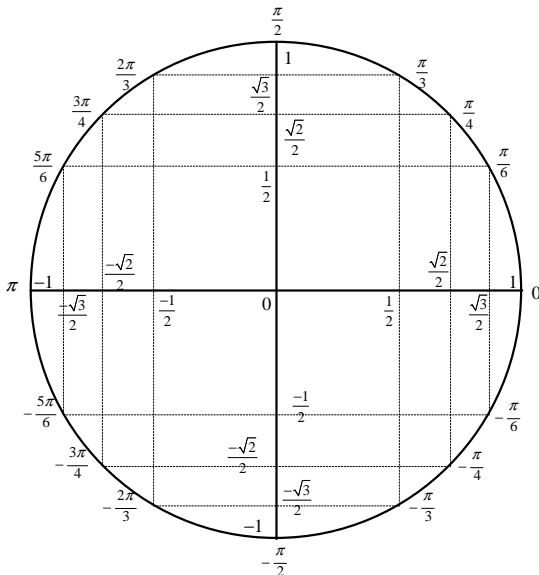
لدينا

$\cos x = a$ $\sin x = b$ $\tan x = c$

2) خاصيات

(a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\times	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0



I - الأفاصيل المنحنية

(1) (*) ليكن $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$ م م م. ولتكن U الدائرة التي مركزها o وشعاعها 1

(* نختار المنحى المعاكس لعقري الساعة

الساعة كمنحى موجب. ولتكن $I(1,0)$.

(* الدائرة U تسمى الدائرة المثلثية التي أصلها I .

(2) لتكن M نقطة من U . للحصول على أفصول منحني ل M .

نختار قوسا تؤدي من I نحو M ونقيس طولها.

ليكن α طول هذه القوس.

(* إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى الموجب فإن α أفصول منحني للنقطة M .

(* إذا كان الانتقال من I نحو M يتم حسب المنحى السالب فإن $-\alpha$ أفصول منحني للنقطة M .

(3) للحصول على جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يكفي أن نتعرف على أحد هذه الأفاصيل فقط (عادة نختار أقصر قوس تؤدي من I إلى M).

وإذا كان α أحد هذه الأفاصيل فإن الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي الأعداد التي تكتب على شكل $\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

(4) يكون العددين α و β أفصولين منحنيين لنفس النقطة إذا وفقط إذا كان $\alpha - \beta = 2k\pi$ يعني $\alpha \equiv \beta$ [2π] حيث $k \in \mathbb{Z}$ ونكتب $\alpha \equiv \beta$ [2π] $\Leftrightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$

$\alpha \equiv \beta$ [2π] $\Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi$

$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi$

$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi$

$\alpha \equiv \alpha + 2n\pi$ [2π] (*) (2)

$\alpha \equiv \beta$ [2π] $\Leftrightarrow \alpha \equiv \beta + 2n\pi$ [2π] (*)

(5) من بين جميع الأفاصيل المنحنية لنقطة M يوجد أفصول منحني وحيد α_0 يحقق $-\pi < \alpha_0 < \pi$.

ونحصل عليه باختيار أقصر قوس تؤدي من I نحو M .

(6) نعتبر الأعداد $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

عدد النقط التي أفصولها المنحنية هي هذه الأعداد هو n . ومن أجل إنشائها يكفي تعويض k ب n قيمة متتابة. عادة نعوض k بالقيم $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ وهذه النقط تكون مضلعا منتظما محاطا بالدائرة U .

II - قياس الزوايا الموجهة

(1) لتكن \vec{u}, \vec{v} متجهتين غير منعدمتين.

من أجل تحديد قياسات الزاوية

الموجهة (\vec{u}, \vec{v}) للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} نتبع ما يلي:

(* نزيح المتجهتين \vec{u} و \vec{v} إلى نفس الأصل.

(* المتجهتان \vec{u} و \vec{v} تحددان زاويتين هندسيتين نختار إحداهما

(عادة نختار الزاوية الحادة) ونحدد قياسها الهندسي بالرديان. ليكن α هذا القياس.

← إذا التحرك من \vec{u} نحو \vec{v} داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $\alpha + 2k\pi$ هو قياس لهذه الزاوية ونكتب

$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha + 2k\pi$ أو $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha$ [2π]

← إذا كان التحرك من \vec{u} نحو \vec{v} داخل هذه الزاوية يتم حسب المنحى الموجب فإن كل عدد على شكل $-\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) هو قياس لهذه الزاوية.

ونكتب $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -\alpha + 2k\pi$ أو $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -\alpha$ [2π]

2) خاصيات

(a) من بين قياسات (\vec{u}, \vec{v}) يوجد قياس وحيد يحقق $-\pi < \alpha_0 \leq \pi$ ويسمى القياس الرئيسي.

(4) المترجمات المثلثية. (انظر التمارين)

ملاحظة

(1) نضع $f(x) = a \cos(u(x)) + b$ أو $f(x) = a \sin(u(x)) + b$

(* إذا كان a و b غير متقابلين وغير متساويين فإن $f(x)$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x) = 0$)

(* إذا كان a و b متقابلين أو متساويين فإن $f(x)$ لها إشارة ثابتة (2) نضع $f(x) = a \tan(u(x)) + b$ تغير الإشارة في حلول المعادلة $f(x) = 0$ وفي الأعداد التي تكون غير معرفة فيها.

(5) صيغ التحويل

(a) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$ $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

(c) $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$
 $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$
 $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin(2a)$

(b) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
 $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
 $\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

(d) $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
 $\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
 $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

(e) $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$
 $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$
 $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$
 $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$

(f) نضع $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ لدينا .

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

(g) من أجل تحويل $f(x) = a \cos x + b \sin x$ نتبع ما يلي:

$f(x) = a \cos x + b \sin x$
 $= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$
 $= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x)$
 $= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha)$
 $= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$

مع $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ و $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(b) تكون $\tan(x)$ معرفة إذا فقط إذا كان $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ يعني $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

(c) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

(d) $\tan(x + k\pi) = \tan x$ $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

(e) $\tan(-x) = -\tan x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$

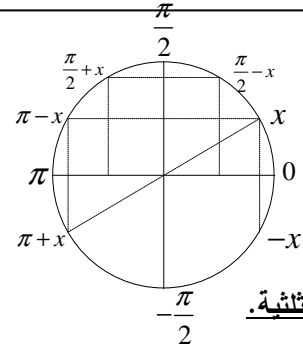
(f) $\cos(\pi + x) = -\cos x$
 $\sin(\pi + x) = -\sin x$
 $\tan(\pi + x) = \tan x$

(f) $\cos(\pi - x) = -\cos x$
 $\sin(\pi - x) = \sin x$
 $\tan(\pi - x) = -\tan x$

(g) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
 $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan x}$

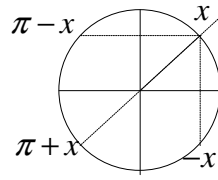
(g) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$

(h) $(\forall x \in \mathbb{R}) : -1 \leq \cos x \leq 1 ; -1 \leq \sin x \leq 1$



(3) المعادلات المثلثية.

(a) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$
 $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$ $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$
 $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



(b) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
 $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$
 $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$

(c) $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

ملاحظات

(1) إذا كان $\alpha \notin [-1, 1]$ فإن المعادلتين $\sin x = a$ و $\cos x = a$ ليس لهما حل.

(2) تكون المعادلة $\tan(u(x)) = a$ معرفة إذا فقط إذا كان $\begin{cases} u(x) \\ u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$ معرفة

(3) $-\tan \alpha = \tan(-\alpha)$ $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$ $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$
 $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

الجداء السلمي - الدائرة

5) المستقيم في المستوى

(a) ليكن (D) مستقيم و \vec{n} متجهة. نقول إن المتجهة \vec{n} منظمية على (D) إذا كان حامل \vec{n} عمودي على (D) (يعني $\vec{n} \perp (D)$).

(b) نعتبر المستقيم: $(D): ax+by+c=0$

لدينا $\vec{u}(-b, a)$ موجهة ل (D) و $\vec{n}(a, b)$ منظمية على (D) .

(c) معادلة مستقيم معرف بنقطة و متجهة منظمية عليه.

مثال: حدد المعادلة ديكرتية للمستقيم (D) المار من $A(1,2)$ و المتجهة $\vec{n}(-3,4)$ منظمية عليه.

طريقة 1.

$$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x-1) + 4(y-2) = 0$$

$$(D): -3x + 4y - 5 = 0 \quad \text{إن}$$

طريقة 2. لدينا $\vec{n}(-3,4)$ منظمية على (D) إذن معادلة (D) على شكل

$(D): -3x + 4y - 5 = 0$ ولدينا $A(1,2)$ إذن $(-3) \cdot 1 + 4(2) + c = 0$ يعني $c = -5$ إذن $(D): -3x + 4y - 5 = 0$

(d) ليكن (D) مستقيم مار من A و \vec{n} منظمية عليه.

و (D') مستقيم مار من A' و \vec{n}' منظمية عليه.

(* يكون $(D) \perp (D')$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n} \perp \vec{n}'$ يعني $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

(* يكون $(D) \parallel (D')$ إذا وفقط إذا كان $\vec{n} \parallel \vec{n}'$ يعني $\det(\vec{n}, \vec{n}') = 0$

(e) نعتبر المستقيمين: $(D): ax + by + c = 0$ و $(D'): a'x + b'y + c' = 0$

(* يكون $(D) \perp (D')$ إذا وفقط إذا كان $aa' + bb' = 0$

(* يكون $(D) \parallel (D')$ إذا وفقط إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$

(f) مسافة نقطة عن مستقيم.

(i) ليكن (D) مستقيم و A نقطة من المستوى.

نسمي مسافة A عن (D) العدد الذي نرمز له ب $d(A, (D))$ والمعروف بما يلي $d(A, (D)) = AH$ حيث H هي المسقط العمودي ل A على (D) .

(ii) نعتبر المستقيم $(D): ax + by + c = 0$ والنقطة $A(x_0, y_0)$

$$d(A, (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{لدينا}$$

ملاحظة: مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي أصغر مسافة

بين A ونقط المستقيم (D) .

(g) واسط القطعة $[AB]$ هو المستقيم المار من I منتصف $[AB]$ و \overline{AB} منظمية عليه.

(h) (* مركز ثقل المثلث (ABC) هو تقاطع المتوسطات.

(* مركز تعامد المثلث (ABC) هو تقاطع الارتفاعات.

(* مركز الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع الواسطات.

(* مركز الدائرة المحاطة بالمثلث (ABC) هو تقاطع المنصفات.

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم (o, \vec{i}, \vec{j}) .

(I) تحليلية الجداء السلمي

1) نعتبر المتجهتين $\vec{v}(x', y')$ و $\vec{u}(x; y)$

لدينا $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) نعتبر النقطتين $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$

لدينا $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ و $\overline{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad 3$$

$$4$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \quad (a)$$

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad (b)$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \cdot \|\overline{AC}\|} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \cdot AC} \quad (c)$$

$$\sin(\widehat{BAC}) = \left| \sin(\overline{AB}, \overline{AC}) \right| = \left| \frac{\det(\overline{AB}, \overline{AC})}{AB \cdot AC} \right| \quad (d)$$

ملاحظة:

(a) إذا أردنا تحديد قياسا للزاوية الهندسية \widehat{BAC} يكفي حساب $\cos(\widehat{BAC})$

نجد مثلا: $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{2}$

يعني $\cos(\widehat{BAC}) = \cos \frac{2\pi}{3}$

إذن $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

(b) إذا أردنا تحديد قياس الزاوية الموجهة $(\overline{AB}, \overline{AC})$ نقوم بحساب

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) \quad \text{و} \quad \sin(\overline{AB}, \overline{AC})$$

نجد مثلا: $\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

ومن أجل تحديد قياس الزاوية نتبع ما يلي:

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \cos \frac{3\pi}{4} \quad \text{يعني} \quad \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{يعني} \quad (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$$

ولدينا $\sin(\overline{AB}, \overline{AC}) < 0$

$$\text{إذن} \quad (\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{يعني} \quad (\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$$

(II) دراسة تحليلية للدائرة.

1) الدائرة التي مركزها Ω وشعاعها r هي مجموعة M التي تحقق $\Omega M = r$.

2) معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هي $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ شكل $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

3) نعتبر المجموعة (Γ) التي معادلتها $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ من أجل دراسة طبيعة المجموعة (Γ) هناك طريقتان:

ط1: نضع $a = -\frac{\alpha}{2}$ $b = -\frac{\beta}{2}$ $c = \gamma$ ونقوم بحساب $a^2 + b^2 - c$

(* إذا كان $a^2 + b^2 - c < 0$ فإن $\Gamma = \emptyset$

(* إذا كان $a^2 + b^2 - c = 0$ فإن $\Gamma = \{\Omega(a,b)\}$

(* إذا كان $a^2 + b^2 - c > 0$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

ط2: نقوم بتحويل المعادلة لنعرجها على شكل $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$

باستعمال بداية متطابقة هامة $X^2 + \alpha X = \left(X + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

(* إذا كان $k < 0$ فإن $(\Gamma) = \emptyset$.

(* إذا كان $k = 0$ فإن $\Gamma = \{\Omega(a,b)\}$

(* إذا كان $k > 0$ فإن (Γ) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها $r = \sqrt{k}$.

4) معادلة دائرة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن (ℓ) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ للحصول على معادلة (ℓ) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة: $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$

$M(x,y) \in (\ell) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

ط2: نتبع ما يلي: $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_B \\ y-y_B \end{pmatrix} = 0$

ملاحظة: إذا كان (ABC) قائم الزاوية في A فإن الدائرة المحيطة بالمثلث (ABC) هي الدائرة التي قطرها $[BC]$. مركزها هو منتصف $[BC]$ شعاعها هو $\frac{BC}{2}$.

5) تمثيل باراميتري للدائرة.

تمثيل باراميتري للدائرة (ℓ) التي مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r هو

$(C): \begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases} (\theta \in \mathbb{R})$

6) داخل خارج دائرة:

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a,b)$ وشعاعها r معادلتها

$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + c = 0$ ونعتبر النقطة $M(\alpha, \beta)$

(* تكون M خارج الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:

$\Omega M > 0$ أو $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\alpha + \beta\beta + c > 0$

(* تكون M داخل الدائرة (ℓ) إذا وفقط إذا كان:

$\Omega M < 0$ أو $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\alpha + \beta\beta + c < 0$

(* $M \in (C)$ إذا وفقط إذا كان $\Omega M = r$ أو

$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\alpha + \beta\beta + c = 0$

7) تقاطع مستقيم ودائرة.

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r ومعادلتها

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

ونعتبر المستقيم $(\Delta): \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

من أجل دراسة تقاطع (C) و (Δ) نقوم بحساب $d(\Omega, (\Delta))$.

(a) إذا كانت $d(\Omega, (\Delta)) > r$ فإن (Δ) يوجد خارج (C) وبالتالي لا يقطع (C) .

(b) إذا كانت $d(\Omega, (\Delta)) = r$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطة واحدة A ونقول في هذه الحالة إن (Δ) مماس ل (C) في النقطة A و A تسمى نقطة التماس.

وللحصول على نقطة التماس نقوم بحل

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} \text{النظمة}$$

(c) إذا كانت $d(\Omega, (\Delta)) < r$ فإن (Δ) يقطع (C) في نقطتين A

و B ، وللحصول على إحداثيات النقطتين A و B نقوم بحل

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} \text{النظمة}$$

8) معادلة مماس لدائرة.

لتكن (C) دائرة مركزها Ω وشعاعها r

ومعادلتها $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ وليكن (T) المماس ل (C) في

النقطة $A(x_0, y_0)$.

للحصول على معادلة (T) هناك طريقتان:

ط1: نستعمل الصيغة $(T): x_0x + y_0y + \frac{a}{2}(x_0 + x) + \frac{b}{2}(y_0 + y) + c = 0$

ط2: (T) هو المستقيم المار من Ω والمتجه $\overline{\Omega A}$ منظمية عليه.

ملاحظة: يكون (T) مماسا ل (C) في A إذا وفقط إذا كان (T)

عموديا على (ΩA) في A .

المتتاليات العددية

(c) تكون الأعداد c و b و a في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة
المتتالية حسابية إذا كان $a + c = 2b$ يعني $\frac{a+b}{2} = b$.

(2) الحد العام.

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = U_0 + nr \quad \text{لدينا}$$

ملاحظة:

(1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو:

$$. U_n = U_1 + (n-1)r$$

(2) إذا كان الحد الأول هو u_2 فإن الحد العام هو:

$$. U_n = U_2 + (n-2)r$$

(3) بصفة عامة: إذا كان U_p و U_n حدين من متتالية حسابية

$$U_n = U_p + (n-p)r \quad \text{أساسها } r \text{ فإن}$$

(ترتيب p و n غير مهم).

(3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1) \frac{(u_0 + u_n)}{2}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

$$. u_1 + u_2 + \dots + u_n = n \frac{u_1 + u_n}{2} \quad (1)$$

$$. u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \quad (2)$$

(3) بصفة عامة

$$. u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

III المتتاليات الهندسية.

(1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية إذا وجد عدد حقيقي q

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = q \cdot U_n \quad \text{بحيث:}$$

العدد q يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

(a) تكون متتالية (حدودها غير منعدمة) هندسية إذا فقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

(b) لكي نبين أن المتتالية (U_n) هندسية يستحسن حساب U_{n+1}

$$. u_{n+1} = q \cdot u_n \text{ ونجد}$$

(c) تكون الأعداد c و b و a في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة

$$. ac = b^2 \text{ إذا فقط إذا كان}$$

I) عموميات.

(1) تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق U من جزء I من \mathbb{N} نحو \mathbb{R} :

$$U: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow u(n)$$

(2) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in I}$:

(a) مكبورة إذا فقط إذا وجد عدد M بحيث $(\forall n \in I) U_n \leq M$.

(b) مصغورة إذا فقط إذا وجد عدد m بحيث $(\forall n \in I) U_n \geq m$.

(c) محدودة إذا فقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني.

إذا وجد عددين m و M بحيث $(\forall n \in I) : m \leq u_n \leq M$.

ملاحظة:

تكون $(U_n)_{n \in I}$ محدودة إذا وجد $k \geq 0$ بحيث $(\forall n \in I) : |U_n| \leq k$

(3) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

(a) تزايدية إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \leq U_{n+1}$.

(b) تزايدية قطعاً إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n < U_{n+1}$.

(c) تناقصية إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \geq U_{n+1}$.

(d) تناقصية قطعاً إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > U_{n+1}$.

(e) ثابتة إذا فقط إذا كان $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n = U_{n+1}$.

ملاحظات:

(1) إذا كانت (U_n) تزايدية فإن $u_p \leq u_n$ $p < n$.

(2) إذا كانت (U_n) تناقصية فإن $u_p \geq u_n$ $p < n$.

(3) من أجل دراسة رتبة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة

$$. u_{n+1} - u_n$$

(* إذا كانت $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (U_n) تزايدية.

(* إذا كانت $0 < u_{n+1} - u_n$ فإن (U_n) تزايدية قطعاً.

(* إذا كانت $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (U_n) تناقصية.

(* إذا كانت $0 < u_{n+1} - u_n$ فإن (U_n) تناقصية قطعاً.

(* إذا كانت $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (U_n) ثابتة.

II المتتالية الحسابية

(1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية إذا فقط وجد عدد حقيقي r

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = U_n + r \quad \text{بحيث}$$

r يسمى أساس المتتالية.

ملاحظات:

(a) تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا فقط إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

(b) لكي نبين أن (U_n) حسابية نقوم بحساب $u_{n+1} - u_n$

$$\text{ونجد } u_{n+1} - u_n = cte \text{ وتكون الثابتة هي الأساس.}$$

(2) الحد العام:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

$$\text{لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = u_0 \cdot q^n$$

ملاحظة:

(1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

(2) بصفة عامة: إذا كان u_p حد من متتالية هندسية

$$\text{أساسها } q \text{ فإن } u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

(ترتيب p غير مهم).

(3) مجموع حدود متتالية لمتتالية هندسية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 .

مع $(q \neq 1)$.

$$S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

u_0 : الحد الأول للمجموع S .

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

(1) إذا كان $q=1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0$

$$(2) \quad u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad : q \neq 1$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

بصفة عامة

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \cdot \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

النهايات

(5) نهايات اعتيادية.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$$

(6) النهايات والترتيب.

(a) إذا كان $|f(x) - l| \leq g(x)$ بجوار x_0 فإن $\lim_{x_0} f(x) = l$ و $\lim_{x_0} g(x) = 0$

(b) إذا كان $f(x) \leq g(x)$ بجوار x_0 فإن $\lim_{x_0} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x_0} f(x) = +\infty$

(c) إذا كان $f(x) \leq g(x)$ بجوار x_0 فإن $\lim_{x_0} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x_0} g(x) = -\infty$

(d) إذا كانت $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ بجوار x_0 فإن $\lim_{x_0} f(x) = l$ و $\lim_{x_0} g(x) = \lim_{x_0} h(x) = l$

(I) النهايات

(1) الأشكال الغير محددة:

$+\infty - \infty$	$\infty \times 0$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
--------------------	-------------------	-------------------------	---------------

(2) العمليات على النهايات الغير منتهية:

$$a \times \infty = \infty \quad (a \neq 0)$$

$$\infty \times \infty = \infty$$

$$0 \times \infty \text{ ش غ محدد}$$

$$+\infty + a = +\infty$$

$$-\infty + a = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$+\infty - \infty \text{ ش غ محدد}$$

$$\frac{\infty}{a} = \infty \quad \frac{a}{\infty} = 0 \quad \frac{a \neq 0}{0} = \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \text{ ش غ محدد}$$

$$(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$\sqrt{+\infty} = +\infty$$

(3) خاصيات

(a) إذا كانت f و g للاثنتين f و g نهاية منتهية في x_0 فإن الدوال $f + g$ و $f \cdot g$ و αf تقبل نهاية منتهية في x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \text{فإن } \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) \neq 0$$

(b) نهاية دالة حدودية في ∞ هي نهاية الحد الأكبر درجة .

(c) نهاية دالة جذرية في ∞ هي نهاية خارج الحدين الأكبر درجة

(4) بعض التقنيات لحساب نهاية دالة لا جذرية:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \leftarrow \text{التعميل.}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = +\infty - \infty$$

(*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ متقابلين \leftarrow المرافق.

(*) إذا كان الحدين الأكبر درجة في كل من $f(x)$ و $g(x)$ غير متقابلين \leftarrow التعميل.

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a-a}{0} = \frac{0}{0} \leftarrow \text{المرافق.} \quad (a \neq 0)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0+0}{0} = \frac{0}{0} \leftarrow \text{التفكيك ثم ربما المرافق.} \quad (a \neq 0)$$

$$(e) \text{ ملاحظة: } \sqrt{x^2} = |x| \quad ; \quad \begin{cases} x = \sqrt{x^2}; x \geq 0 \\ x = -\sqrt{x^2}; x \leq 0 \end{cases}$$

دراسة الدوال

4) اشتقاق دالة على مجال - الدالة المشتقة	
(a) نقول إن f قابلة للإشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I	
(b) نقول إن f قابلة للإشتقاق على المجال $[a, b]$ إذا كانت قابلة للإشتقاق على المجال $]a, b[$ وعلى يمين a وعلى يسار b .	
(c) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على I فإن الدالة $f': x \rightarrow f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة	
(d) إذا كانت f' قابلة للإشتقاق على مجال I فإن الدالة المشتقة للدالة f' تسمى المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بـ f'' .	
(e) الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية .	
$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ (10)	$(a)' = 0$ (1)
$(\frac{1}{f})' = \frac{-f'}{f^2}$ (11)	$(x)' = 1$ (2)
	$(ax)' = a$ (3)
	$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$ (12)
$(\sin x)' = \cos x$ (13)	$(x^n)' = nx^{n-1}$ (4)
	$(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2}$ (5)
	$(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b)$ (14)
$(\cos x)' = -\sin x$ (15)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (6)
	$(f+g)' = f'+g'$ (7)
	$(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b)$ (16)
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ (17)	$(fg)' = f'g + g'f$ (8)
$(f^n)' = nf'f^{n-1}$ (18)	$(af)' = af'$ (9)
	$(\tan(ax+b))' = a(1 + \tan^2(ax+b))$ (19)
ملاحظة (a) لتكن f دالة معرفة على مجال I ولا تحتوي على $\sqrt{\quad}$. لكي ندرس اشتقاق f في x_0 نتحقق هل تغير صيغتها في x_0 أم لا ؟	
(*) إذا كنت f لا تغير صيغتها في x_0 نقوم بحساب $f'(x)$ ونعوض x بـ x_0	
(*) إذا كنت f تغير صيغتها في x_0 ندرس الإشتقاق باستعمال معدل التغير .	
(b) إذا كانت f' تتعدم في x_0 ($f'(x_0) = 0$) فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ موازيا لمحور الأفاصيل .	
5) تغيرات دالة	
لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .	
(a) تكون f تزايدية على I إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \geq 0$	
(b) تكون f تزايدية قطعاً على I إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \geq 0$ والأعداد التي تتعدم فيها f' معدودة .	
(c) تكون f تناقصية على I إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \leq 0$	
(d) تكون f تناقصية قطعاً على I إذا فقط إذا كان $(\forall x \in I): f'(x) \leq 0$ والأعداد التي تتعدم فيها f' معدودة .	

I) الإشتقاق	
1) تعاريف	
(a) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in IR$	العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في x_0 ونكتب $f'(x_0) = l$
(b) تكون f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 إذا فقط إذا كان :	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in IR$ ونكتب $f'_d(x_0) = l$
(c) تكون f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 إذا فقط إذا كان :	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in IR$ ونكتب $f'_g(x_0) = l$
(d) تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا فقط إذا كانت قابلة للإشتقاق على يمين x_0 وعلى يسار x_0 و $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$	
(e) * $(f \text{ متصلة في } x_0) \Rightarrow (f \text{ قابلة للإشتقاق في } x_0)$	
(*) $(f \text{ غير قابلة للإشتقاق في } x_0) \Rightarrow (f \text{ غير متصلة في } x_0)$	
2) التاويل الهندسي :	
(a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f يقبل مماسا (T) عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معمله الموجه $f'(x_0)$ معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الأشكال التالية :	
(b) إذا كانت f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_1) عند النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معمله الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ وسيكون C_f على أحد الشكلين التاليين :	
(c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للإشتقاق على اليسار .	
ملاحظة * إذا كانت f قابلة للإشتقاق على بين x_0 وعلى يسار x_0 و $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ فإن f غير قابلة للإشتقاق في x_0 إذن C_f لا يقبل مماسا في M لكنه يقبل نصفي مماس غير منطبقين وسيكون C_f على أحد الأشكال :	
(*) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "لاينكسر" في M وإذا كانت f غير قابلة للإشتقاق في x_0 فإن C_f "ينكسر" في M ويكون زاوية . ونقول إن M نقطة مزوات .	
3) الدالة التآلفية المماسية لدالة .	
(a) إذا كانت f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن الدالة $u(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسية للدالة f في x_0	
(b) وإذا كان a جد قريب من x_0 فإن $u(a)$ قيمة مقربة لـ $f(a)$ ($f(a) = u(a)$)	

(6) مطراف دالة .

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و $x_0 \in I$. يكون للدالة f مطرافا نسبيا في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تتعدم وتغير الإشارة في x_0 .

(II) التمثيل المبياني لدالة

(1) التقعر

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .

(a) يكون C_f محدبا () إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I) : f''(x) \geq 0$

(b) يكون C_f مقعرا () إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I) : f''(x) \leq 0$

(2) نقط انعطاف

(a) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق في x_0 و (T) المماس لـ C_f في

$M(x_0, f(x_0))$ نقول إن M نقطة انعطاف إذا كان C_f يغير التقعر في

M (C_f يخترق (T)) :

(b) لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I و $x_0 \in I$ تكون

النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كان f'' تتعدم وتغير

إشارة في x_0 .

ملاحظة إذا كانت f' تتعدم ولاتغير الإشارة في x_0 فإن $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس فيها موازيا لمحور الأفاصيل .

(b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف او دراسة التقعر نحسب $f''(x)$ وندرس إشارتها .

(3) الفروع اللانهائية .

(a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعا لانهايا إذا كانت لدينا إحدى الحالات التالية :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(b) تصنيف الفروع اللانهائية :

(1) إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

فإن المستقيم $(\Delta) : x = a$ مقارب لـ C_f بجوار a .

(2) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

فإن المستقيم $(\Delta) : y = a$ مقارب لـ C_f بجوار ∞ .

(3) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

(a) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

فإن C_f يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتيب بجوار ∞ .

(b) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

فإن C_f يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ .

(c) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ نقوم بحساب $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$.

(i) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$

فإن المستقيم $(\Delta) : y = ax + b$ مقارب لـ C_f بجوار ∞ .

(ii) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$

فإن C_f يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه $y = ax$ بجوار ∞ .

ملاحظة يكون المستقيم $(\Delta) : y = ax + b$ مقاربا لـ C_f بجوار

∞ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ونستعمل

هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $(\Delta) : y = ax + b$ مقاربا لـ

C_f أو إذا كانت $f(x)$ على شكل $f(x) = ax + b + h(x)$ مع

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$$

(4) محور تماثل - مركز تماثل

(a) يكون المستقيم $(\Delta) : x = a$ محور تماثل C_f إذا وفقط إذا كان :

(* لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$

(* $(\forall x \in D_f) : f(2a - x) = f(x)$

(b) تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل C_f إذا وفقط إذا كان :

(* لكل x من D_f لدينا $2a - x \in D_f$

(* $(\forall x \in D_f) : f(2a - x) = 2b - f(x)$

(III) الدوال الدورية

(1) تعريف

(a) نقول إن الدالة f دورية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم T

بحيث $(\forall x \in D_f) : f(x + T) = f(x)$ وكل عدد T يحقق هذا الشرط

يسمى دور f

(b) إذا كان T دورا للدالة f فإن كل عدد kT دور لـ f ($k \in \mathbb{Z}$)

(c) نختار عادة أصغر دور موجب قطعاً .

ملاحظة (a) لكي نبين أن f دورية يجب أولاً ملاحظة الدور ثم نتحقق منه

(b) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ (*) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ (*)

(b) $\sin(x + k\pi) = \sin x$ (*) $\sin(x + \pi) = -\sin x$ (*)

(b) $\tan(x + k\pi) = \tan x$ (*)

(2) ادوار بعض الدوال الإعتيادية .

(a) $f(x) = \sin(ax + b)$ أو $f(x) = \cos(ax + b)$ $T = \frac{2\pi}{|a|}$

(b) $f(x) = \sin^2(ax + b)$ أو $f(x) = \cos^2(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{|a|}$

(c) $f(x) = \tan(ax + b)$ $T = \frac{\pi}{|a|}$

(d) لكي نحدد دور $f + g$ نحدد أدوار كل من f و g و نأخذ أصغر دور مشترك .

(3) رتبة دالة دورية .

لتكن f دالة دورية دورها T . إذا كانت f رتبية على $[a, b]$ فإن

f رتبية على $[a + T, b + T]$ ولها نفس الرتبة .

(4) منحني دالة دورية

(a) إذا كانت f دالة دورية دورها T فيكفي إنشاء C_f على مجال سعته T

(عادت نأخذ $[0, T] \cap D_f$) ثم إزاحته بإلزاحة التي متجهتها $T\vec{i}$

ومن أجل إزاحة هذا الجزئ نبحث عن النقط المهمة التي تكونه ونزجها

بإضافة T إلى أفصولها والإحتفاظ بالرتوب إذا أردنا الإزاحة نحو اليمين

ونطرح T من الأفصول إذا أردنا الإزاحة نحو اليسار .

(b) إذا كانت f دالة دورية دورها T وزوجية (أو فردية) فيكفي إنشاء

C_f على $[0, \frac{T}{2}] \cap D_f$ ثم إنشاء المماثل بالنسبة لمحور الأرتيب (او أصل

المعلم) ثم الإزاحة .

الدوران

(8) الدوران يحافظ على التعامد والتوازي يعني :

صورة مستقيمين متعامدين هما مستقيمان متعامدان
و صورة مستقيمين متوازيين هما مستقيمان متوازيان .

$$(9) \text{ ليكن } r = r(\Omega, \mp \frac{\pi}{2}) .$$

(a) إذا كان $r(M) = M'$ فإن المثلث $(\Omega MM')$ متساوي الساقين وقائم الزاوية في Ω .

(b) صورة مستقيم (D) هو مستقيم (D') عمودي على (D) .

$$(10) \text{ ليكن } r = r(\Omega, \mp \frac{\pi}{3}) .$$

إذا كان $r(M) = M'$ فإن المثلث $(\Omega MM')$ متساوي الأضلاع

(11) (a) صورة القطعة $|AB|$ بالدوران r هي القطعة $|A'B'|$.

(b) صورة المستقيم (AB) بالدوران r هي $(A'B')$.

(c) صورة النصف المستقيم $[AB]$ بالدوران r هي

النصف المستقيم $[A'B']$.

(d) صورة الدائرة $C(\Omega, R)$ بالدوران r هي الدائرة $C'(\Omega', R)$

مع $\Omega' = r(\Omega)$.

(12) (a) نعتبر الدوران $r = r(\Omega, \alpha)$ والدوران $r = r(\Omega, -\alpha)$

يسمى الدوران العكسي للدوران r ونرمز له بـ r^{-1} .

(b) إذا كان $r = r(\Omega, \alpha)$ فإن $r^{-1} = r(\Omega, -\alpha)$ ولدينا :

$$r(M) = M' \Leftrightarrow r^{-1}(M') = M$$

(III) بعض الملاحظات وبعض التقنيات .

(1) لكي نحدد قياس الزاوية الموجهة $(\widehat{AB}, \widehat{AC})$. نحدد قياس الزاوية

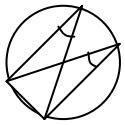
الهندسية $\left| \widehat{BAC} \right|$ ليكن α هذا القياس .

(*) إذا كان التحرك من \overrightarrow{AB} نحو \overrightarrow{AC} يتم حسب المنحى الموجب فإن

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \alpha |2\pi|$$

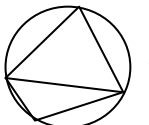
(*) إذا كان التحرك حسب المنحى السالب فإن $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv -\alpha |2\pi|$

(2) لتكن C دائرة مركزها O .



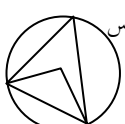
(a) إذا كانت \hat{A} و \hat{B} زاويتين محيطيتين وتحصران نفس الوتر

وتوجدان من نفس الجهة لهذا الأخير فإن $\hat{A} = \hat{B}$



(b) إذا كانت \hat{A} و \hat{B} زاويتين محيطيتين وتحصران نفس الوتر

وتوجدان من جهتين مختلفتين لهذا الأخير فإن $\hat{A} + \hat{B} = \pi$



(c) إذا كانت زاوية محيطية \hat{A} وزاوية مركزية \hat{O} تحصران نفس

الوتر وتوجدان من نفس الجهة لهذا الأخير فإن $\hat{O} = 2\hat{A}$.

(I) تعريف

الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته α هو التطبيق الذي يترك Ω صامدة $r(\Omega) = \Omega$ ويربط كل نقطة $M \neq \Omega$ بالنقطة M' بحيث :

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) \equiv \alpha |2\pi| \end{cases}$$

(II) خاصيات

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω وزاويته α $r = r(\Omega, \alpha)$

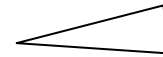
$$(1) * r(\Omega) = \Omega$$

$$* (\forall M \in (P)) : r(M) = M' \Leftrightarrow M = \Omega$$

هذا يعني أن النقطة M هي النقطة الوحيدة الصامدة بالدوران r .

$$(2) (\forall M \in (P)) : r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) \equiv \alpha |2\pi| \end{cases}$$

(3) $r(M) = M'$ تكافئ المثلث $(\Omega MM')$ متساوي الساقين في Ω و



$$(\overline{\Omega M}, \overline{\Omega M'}) \equiv \alpha |2\pi|$$

(4) الدوران يحافظ على المسافة يعني

$$\text{إذا كان } \begin{cases} r(A) = A' \\ r(B) = B' \end{cases} \text{ فإن } AB = A'B'$$

$$(5) \text{ إذا كان } \begin{cases} r(A) = A' \\ r(B) = B' \end{cases} \text{ فإن } (\overline{AB}, \overline{A'B'}) \equiv \alpha |2\pi|$$

(6) الدوران يحافظ على قياس الزوايا الموجهة يعني

$$\text{إذا كان } \begin{cases} r(A) = A' \text{ et } r(B) = B' \\ r(C) = C' \text{ et } r(C) = C' \end{cases}$$

$$\text{فإن } (\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv (\overline{A'B'}, \overline{C'D'}) |2\pi|$$

(7) (a) الدوران يحافظ على المرجح يعني :

إذا كان G مرجح $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ فإن G' مرجح

$$\{(A', \alpha), (B', \beta)\}$$

(b) الدوران يحافظ على المنتصف يعني :

إذا كان I منتصف $|AB|$ فإن I' منتصف $|A'B'|$

(c) الدوران يحافظ على معامل استقامة متجهتين يعني :

$$\text{إذا كان } \overline{AB} = k\overline{CD} \text{ فإن } \overline{A'B'} = k\overline{C'D'}$$

(d) الدوران يحافظ على استقامة 3 نقط يعني :

إذا كانت النقط A و B و C مستقيمة فإن صورها A' و B' و C'

مستقيمة .

(14) إذا كانت $M \in (E) \cap (F)$ فإن $r(M) \in r(E) \cap r(F)$

(15) ليكن $r = r(\Omega, \alpha)$. إذا أردنا تحديد $r(M)$ نتحقق أولا من

تعريف M :

(a) إذا كانت M تكون مثلثا متساوي الساقين مع O ونقطة M'

نستعمل (II2) ونبين أن $r(M) = M'$.

(b) إذا كانت M منتصف قطعة أو مرجح نظمة نضع $r(M) = M'$

ونستعمل (II7a ou b)

(c) إذا كانت $\overline{AM} = k\overline{AB}$ نضع $r(M) = M'$ ونستعمل (II.7c)

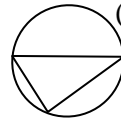
(d) إذا كانت $M \in |AB|$ وتحقق شرطا ما نضع $r(M) = M'$ ونبين أن

M' تحقق نفس الشرط مع نقطة N ونستنتج أن $r(M) = N$.

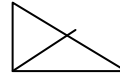
(e) إذا كانت $M \in (E) \cap (F)$ نستعمل (III.14) .

(15) إذا أردنا أن نبين أن J منتصف القطعة $|A'B'|$ نبين أن $r(I) = J$

و I منتصف $|AB|$. ونستعمل (II.7b)



(3) إذا كن $|AB|$ قطر في دائرة (C) و M نقطة من (C) فإن المثلث (ABM) قائم الزاوية في M .



(4) ليكن (ABC) مثلث قائم الزاوية في A

وليكن I منتصف الوتر $|BC|$. لدينا $IA = IB = IC$.

I هو مركز الدائرة المحيطة بـ (ABC) و $|BC|$ قطر لها .

(5) (a) ليكن r دوران مركزه Ω . إذا كان $r(A) = A'$ فإن

$\Omega A = \Omega A'$ وبالتالي Ω ينتمي الى واسط القطعة $|AA'|$.

(b) لكي نحدد مركز دوران r ، نبحث عن نقطتين A و B و صورتاهما .

إذا كان $r(A) = A'$ و $r(B) = B'$ فإن مركز r هو تقاطع واسطي

$|AA'|$ و $|BB'|$.

(6) لكي نحدد زاوية دوران r ، نسميها α ونبحث عن نقطتين A و B

و صورتاهما ونستعمل الخاصية (II5) أو نبحث عن المركز Ω ونقطة A

وصورتها ونستعمل (II2)

(7) لكي نبين أن $AB = CD$ نبحث عن دوران يحول A و B إلى

C و D أو العكس ونستعمل الخاصية (II4) .

(8) لكي نحدد $(\overline{AB}, \overline{CD})$ نبحث عن دوران يحول A و B إلى

C و D أو العكس ونستعمل الخاصية (II5) .

(9) لكي نبين أن $(\overline{AB}, \overline{CD}) \equiv (\overline{A'B'}, \overline{C'D'}) |2\pi|$ نبحث عن

دوران يحول A و B و C و D إلى A' و B' و C' و D' أو

العكس ونستعمل الخاصية (II6) .

(10) لكي نبين أن $(AB) \perp (CD)$ نبحث عن دوران زاويته $\mp \frac{\pi}{2}$ يحول

A و B إلى C و D أو العكس ونستعمل الخاصية (II5) .

(11) لكي نبحث عن دوران يحول A إلى B نبحث عن مثلث متساوي

الساقين (OAB) تكون قاعدته $|AB|$ ويكون هذا الدوران مركزه O

وزاويته $(\overline{OA}, \overline{OB})$.

(12) (a) إذا كان (ABC) متساوي الساقين وله زاوية هندسية قياسها $\frac{\pi}{3}$

فإنه متساوي الأضلاع .

(b) ليكن $r = r(O, \mp \frac{\pi}{3})$ إذا كان $r(A) = A'$ فإن (OAA')

متساوي الأضلاع .

(c) لكي نبين أن (IJK) متساوي أضلاع نبحث عن دوران مركزه I

ويحول J إلى K مثلا .

(13) لكي نبين أن A و B و C مستقيمة نبين أنهما صور لنقط مستقيمة أو

صورها مستقيمة ونستعمل (II7d) أو نبين أن :

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv o \text{ ou } \pi |2\pi|$$

تحليلية الفضاء

(I) الأساس في الفضاء التجهي V_3

(1) لنكن \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} 3متجهات من V_3 و A و B و C و D لنقط بحيث $\vec{AB} = \vec{u}$ و $\vec{AC} = \vec{v}$ و $\vec{AD} = \vec{w}$.

نقول إن المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية إذا فقط إذا كانت النقطة A و B و C و D مستوائية.

نقول إن المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} غير مستوائية إذا فقط إذا كانت النقطة A و B و C و D غير مستوائية.

(2) لنكن \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} 3متجهات غير مستوائية من V_3 .

(* كل متجهة من V_3 تكتب بطريقة وحيدة على شكل

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(* نقول إن المتلوث $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

(* إذا كانت $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ فإن المتلوث (x, y, z) يسمى

متلوث إحداثيات المتجهة \vec{u} بالنسبة للأساس $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ونكتب

$$\vec{u} : (x, y, z) \text{ أو } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(3) ليكن $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ أساس في الفضاء V_3 .

(a) نعتبر المتجهين $\vec{u} : (x, y, z)$ و $\vec{v} : (x', y', z')$

لدينا $\vec{u} + \vec{v} : (x+x', y+y', z+z')$ و $\alpha\vec{u} : (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

(b) نعتبر المتجهين $\vec{u} : (x, y, z)$ و $\vec{v} : (x', y', z')$

من أجل دراسة استقامية المتجهين \vec{u} و \vec{v} نقوم بحساب المحددات الثلاثة المستخرجة من جدول إحداثيات \vec{u} و \vec{v} وهي :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} x & x' \\ x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} x & x' \\ x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$$

(* إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين.

(* إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين.

(c) نعتبر المتجهات $\vec{u} : (x, y, z)$ و $\vec{v} : (x', y', z')$ و

$$\vec{w} : (x'', y'', z'')$$

(* نسمي محددات المتجهات \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} العدد الذي نرمز له بالرمز

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ والمعرف بما يلي :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

(* تكون \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية إذا فقط إذا كان $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

ملاحظة

(a) تكون \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين إذا فقط إذا كان $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ أو $\vec{u} = \alpha\vec{v}$

(b) إذا كانت \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين و $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\alpha = \beta = 0$

(c) تكون u و v و w مستوائية إذا فقط إذا كانت إحداها تكتب بدلالة الأخرى مثلا : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

(d) إذا كانت \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} غير مستوائية و $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ فإن $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(II) المعلم في الفضاء

(1) نسمي معلما في الفضاء كل رباعي $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث O نقطة من الفضاء و \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} 3متجهات غير مستوائية يعني أساس.

(2) ليكن $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلما في الفضاء.

(a) لكل نقطة M من الفضاء المتجهة \vec{OM} تكتب بطريقة وحيدة على شكل $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. المتلوث (x, y, z) يسمى متلوث

إحداثيات النقطة M بالنسبة للمعلم R ونكتب $M(x, y, z)$ أو $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$M(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{ملاحظة}$$

(b) نعتبر النقطتين $A(x, y, z)$ و $B(x', y', z')$

(* لدينا $\vec{AB} = (x' - x, y' - y, z' - z)$

(* إذا كان I منتصف القطعة $[AB]$ فإن

$$I \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2} \right)$$

(III) المستقيم في الفضاء

(1) تعريف

لنكن A نقطة و \vec{u} متجهة. المستقيم المار من A والموجه ب \vec{u} هو المجموعة التي نرمز لها ب $D(A, \vec{u})$ والمعرفة ب

$$D(A, \vec{u}) = \{ M \in E \mid \vec{AM} = \alpha\vec{u} \}$$

ملاحظة \vec{AM} و \vec{u} مستقيمتين $\Leftrightarrow M \in D(A, \vec{u})$

(2) تمثيل باراميتري لمستقيم

تمثيل باراميتري للمستقيم (D) المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه

$$D : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ بالمتجهة } \vec{u}(a, b, c) \text{ هو : } (t \in \mathbb{R})$$

(3) معادلتان ديكارتيتان لمستقيم.

ليكن (D) المستقيم المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه ب $\vec{u}(a, b, c)$ (* إذا كانت الأعداد a و b و c غير منعدمة فإن معادلتنا (D) هما :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

(* إذا كان عدد واحد منعدم و عددان غير منعدمين مثلا $a \neq 0, b = 0$ و

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \text{ : } (D) \text{ هما : } c \neq 0 \text{ فإن معادلتنا } (D)$$

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

نقوم بالشرح ونحصل على معادلة على شكل $Ax + By + Cz + D = 0$ حيث $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

(4) تقاطع مستويين

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستويين يستحسن استعمال معادلتين ديكارتيتين $(P): ax + by + cz + d = 0$

$$(Q): a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Q) نقوم بحساب المحددات

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \text{ و } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

(a) إذا كانت هذه المحددات الثلاثة منعدمة فإن $(P) \parallel (Q)$.

(b) إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة فإن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (D) الذي معادلته الديكارتية هما :

$$(D): \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

(5) تقاطع مستوى ومستقيم

ملاحظة من أجل دراسة تقاطع مستوى ومستقيم يستحسن استعمال معادلة ديكارتية بالنسبة للمستوى وتمثيل باراميتري بالنسبة للمستقيم.

نعتبر المستوى $(P): \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ والمستقيم

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

من أجل دراسة تقاطع (P) و (Δ) نقوم بحل النظام :

$$\begin{cases} x = x_0 + at & (1) \\ y = y_0 + bt & (2) \\ z = z_0 + ct & (3) \\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 & (4) \end{cases}$$

ولهذا نعوض x و y و z في (4) نحصل على معادلة من الدرجة (I) بمجهول واحد t .

(a) إذا كان لهذه المعادلة حلا $t = t_0$ فإن (Δ) يقطع (P) في نقطة (نحصل على إحداثياتها بتعويض t في (1) و (2) و (3)).

(b) إذا كان لهذه المعادلة مالا نهاية له من الحلول $(0 = 0)$ فإن $(\Delta) \subset (P)$.

(c) إذا كانت هذه المعادلة لا تقبل حلا " $4 = 0$ " مثلا فإن (Δ) و (P) متوازيان قطعا.

ملاحظة

(*) $D(A, \vec{u}) \parallel D(B, \vec{v})$ تكافئ \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين

(*) $D(A, \vec{u}) \parallel P(B, \vec{v}, \vec{w})$ تكافئ \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} مستوائية

(*) $P(A, \vec{u}, \vec{v}) \parallel P'(B, \vec{x}, \vec{y})$ تكافئ \vec{u} و \vec{x} و \vec{y} مستوائية

و \vec{v} و \vec{x} و \vec{y} مستوائية.

(* إذا كان عددين منعدمين وعدد واحد غير منعدمين مثلا $a = 0$ ، $b = 0$

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases} \text{ و } c \neq 0 \text{ فإن معادلتنا } (D) \text{ هما :}$$

(4) الأوضاع النسبية لمستقيمين

ملاحظة من أجل دراسة الأوضاع النسبية لمستقيمين يستحسن استعمال تمثيلين باراميتريين .
نعتبر المستقيمين

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ و } (\Delta'): \begin{cases} x = x_1 + a't' \\ y = y_1 + b't' \\ z = z_1 + c't' \end{cases}$$

لدينا (Δ) مار من $A(x_0, y_0, z_0)$ وموجه ب $\vec{u}(a, b, c)$

و (Δ') مار من $B(x_1, y_1, z_1)$ وموجه ب $\vec{u}'(a', b', c')$

من أجل دراسة تقاطع (Δ) و (Δ') نفور بدراسة استقامة \vec{u} و \vec{u}'

(a) إذا كانت \vec{u} و \vec{u}' مستقيمتين فإن $(\Delta) \parallel (\Delta')$. ولمعرفة هل (Δ) و (Δ') منطبقان أم متوازيان قطعا . نتحقق هل $A \in (\Delta')$ ؟

(* إذا كان $A \in (\Delta')$ فإن $(\Delta) = (\Delta')$.

(* إذا كان $A \notin (\Delta')$ فإن (Δ) و (Δ') متوازيان قطعا .

(b) إذا كانت \vec{u} و \vec{u}' غير مستقيمتين فإن (Δ) و (Δ') متقطعان أو غير مستوائيين ، ولمعرفة أي حالة لدينا نقوم بحل النظام :

$$(S) \begin{cases} x_0 + at = x_1 + a't' \\ y_0 + bt = y_1 + b't' \\ z_0 + ct = z_1 + c't' \end{cases}$$

في الثالثة .

(i) إذا كان للنظمة (S) حلا فإن (Δ) و (Δ') متقطعان وللحصول على

إحداثيات نقطة التقاطع نعوض t في تمثيل (Δ) أو t' في تمثيل (Δ') .

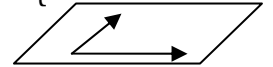
(ii) إذا كانت للنظمة (S) لا تقبل حلا فإن (Δ) و (Δ') غير مستوائيين.

(IV) المستوى في الفضاء

(1) تعريف

لنكن A نقطة و \vec{u} و \vec{v} متجهتين . المستوى المار من A والموجه ب \vec{u} و \vec{v} هو المجموعة التي نرمز لها ب $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ والمعرفة ب

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in E / \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}\}$$



ملاحظة $(AM \text{ و } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستوائية}) \Leftrightarrow M \in P(A, \vec{u}, \vec{v})$

(2) تمثيل باراميتري لمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه بالمتجهتين

$\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{v}(a', b', c')$ تمثيل باراميتري للمستوى (P) هو :

$$(P): \begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't' \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases} \text{ (} t, t' \in \mathbb{R} \text{)}$$

(3) معادلة ديكارتية لمستوى

ليكن (P) المستوى المار من $A(x_0, y_0, z_0)$ والموجه بالمتجهتين

$\vec{u}(a, b, c)$ و $\vec{v}(a', b', c')$

للحصول على معادلة ديكارتية لـ (P) نتبع ما يلي :